

BAC GÉNÉRAL – MATHÉMATIQUES

Terminale spécialité – Sujet d'entraînement

Durée conseillée : 4 heures Total : 20 points

Les quatre exercices sont indépendants. La calculatrice est autorisée. Justifier les réponses et faire figurer les étapes du raisonnement.

	Exercice 1	Exercice 2	Exercice 3	Exercice 4	Total
Points	5	5	5	5	20

Exercice 1 — Analyse

(5 points)

Modèle et propriétés initiales

On étudie un phénomène de refroidissement d'un liquide selon la loi de Newton.

On modélise ce phénomène par la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$f(t) = 25 + 60e^{-0.1t}$$

où $t \geq 0$ représente le temps en minutes.

1. Vérifier que la fonction f est solution de l'équation différentielle $y' = -0.1(y - 25)$. (0,5 point)
2. Calculer $f(0)$ (0,5 point)
3. Calculer $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t)$ (0,5 point)

Étude de la fonction

1. Calculer $f'(t)$ pour tout $t \in [0; +\infty[$. (0,5 point)
2. Étudier le signe de $f'(t)$ et en déduire le sens de variation de f sur $[0; 8]$. (0,5 point)
3. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse $t_0 = 0$. (0,5 point)
4. Déterminer l'asymptote horizontale de $\mathcal{C}_f$ et justifier la position de la courbe par rapport à cette asymptote. (0,5 point)

Prévisions et seuils

1. Déterminer le temps nécessaire pour que $f(t)$ ait parcouru 80% de la variation totale entre sa valeur initiale $f(0)$ et sa valeur limite $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t)$. (1,0 point)
2. Calculer la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[0; 8]$. (0,5 point)

Exercice 2 — Géométrie

(5 points)

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère deux plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ d'équations cartésiennes respectives :

$$\mathcal{P}_1 : 3x - 3y + 6 = 0 \quad \text{et} \quad \mathcal{P}_2 : 9x + 9y - 18z - 27 = 0$$

On considère les droites d_1 et d_2 de représentations paramétriques :

$$d_1 : \begin{cases} x = -2 + 3t \\ y = 3t \\ z = 2 + 3t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \quad \text{et} \quad d_2 : \begin{cases} x = 3 + 3t \\ y = -4 + 3t \\ z = -2 + 3t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

On note $\vec{u}(3; 3; 3)$ un vecteur directeur commun aux droites d_1 et d_2 .

Partie A – Configuration

1. Montrer que les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont sécants. (0,5 point)
2. Vérifier que $d_1 \subset \mathcal{P}_1$ et $d_2 \subset \mathcal{P}_2$. (0,5 point)

Partie B – Parallélisme et théorème du toit

1. Montrer que d_1 et d_2 sont parallèles et justifier que $\vec{u}$ est un vecteur directeur commun. (1,0 point)
2. Déterminer une représentation paramétrique de $\Delta = \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$. (1,0 point)
3. En utilisant le théorème du toit, montrer que $\Delta \parallel d_1 \parallel d_2$. Vérifier cette conclusion en comparant les vecteurs directeurs. (1,0 point)

Partie C – Interprétation géométrique

1. Soit $M(\frac{1}{2}; \frac{5}{2}; 0)$. Vérifier que $M \in \Delta$. (0,5 point)
2. Expliquer géométriquement pourquoi, lorsque deux droites parallèles sont contenues dans deux plans sécants, la droite d'intersection est nécessairement parallèle à ces deux droites. (0,5 point)

Exercice 3 — Probabilités

(5 points)

Une entreprise contrôle la conformité des éléments d'un lot. Les tests sont supposés indépendants et la probabilité de conformité est identique pour chaque élément.

Loi binomiale

On note X la variable aléatoire qui compte le nombre d'éléments conformes parmi les 30 testés. Chaque élément est conforme avec une probabilité $p = 0,90$.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
(0,5 point)
2. Calculer l'espérance $E(X)$ et la variance $V(X)$ de X .
(0,5 point)
3. Calculer $P(X \leq 28)$. On arrondira le résultat à 10^{-3} près.
(0,5 point)
4. Quelle est la probabilité qu'au moins deux éléments ne soient pas conformes parmi les 30 testés ?
On arrondira à 10^{-2} .
(0,5 point)

Somme de variables aléatoires et Tchebychev

On effectue maintenant $n \geq 1$ tests indépendants. Pour chaque test i ($1 \leq i \leq n$), on définit la variable aléatoire X_i qui vaut 1 si l'élément est conforme et 0 sinon. Elle suit la loi de Bernoulli de paramètre $p = 0,90$.

On considère la variable aléatoire $M_n = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$.

1. a) Déterminer l'espérance $E(M_n)$ de la variable aléatoire M_n .
b) Montrer que la variance de M_n est $V(M_n) = \frac{0,09}{n}$.
(1,5 points)
2. Après avoir rappelé l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, montrer que, pour tout entier naturel $n \geq 1$:

$$P(|M_n - 0,90| < 0,05) \geq 1 - \frac{0,09}{n \times 0,05^2}.$$

(1,0 point)

3. En déduire un entier n tel que la moyenne du nombre de conformes pour un échantillon de taille n appartienne à l'intervalle $]0,90 - 0,05 ; 0,90 + 0,05[$ avec une probabilité supérieure ou égale à 0,9.
(0,5 point)

Exercice 4 — Suites

(5 points)

Étude pour $n = 1$

On considère n un entier naturel non nul. On considère la fonction f_n définie sur l'intervalle $[0; 1]$ par :

$$f_n(x) = x^n \sqrt{1-x}.$$

On pose, pour tout entier naturel n non nul :

$$I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x} \, dx.$$

1. Justifier que pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a $I_n > 0$. (0,5 point)
2. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $I_1 = \frac{4}{15}$. (0,5 point)

Suite (I_n)

1. a) Justifier que pour tout $x \in [0; 1]$ et pour tout entier naturel n non nul,

$$0 \leq x^{n+1} \leq x^n.$$

- b) En déduire que pour tout entier naturel n non nul,

$$0 \leq I_{n+1} \leq I_n.$$

- c) Montrer que la suite (I_n) est convergente. (1,0 point)

2. a) Démontrer que pour tout entier naturel n non nul on a :

$$I_n \leq \frac{1}{n+1}.$$

- b) En déduire la limite de la suite (I_n) . (0,5 point)

3. À l'aide d'une intégration par parties, démontrer que pour tout entier naturel n non nul :

$$I_{n+1} = \frac{2(n+1)}{2n+5} I_n.$$

(1,0 point)

Algorithme

1. On considère le script Python ci-dessous définissant la fonction `suite()` :

```
1 from math import *
2
3 def suite():
4     u = ...
5     for n in range(1, ...):
6         u = ...
7     return u
```

Recopier et compléter le script Python ci-dessus pour que la fonction `suite()` renvoie la valeur de I_8 . (1,0 point)

2. Donner une valeur approchée à 10^{-2} du résultat renvoyé par `suite()`. Ce résultat est-il cohérent avec la majoration obtenue à la question B.2 ? (0,5 point)